Prijemni Ispit iz Matematike Septembar 2017

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{1/2}-3a^{-1/2}}+\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{1/2}+3a^{-1/2}}\right)^2=16a, \qquad a\in R\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

2. Rešiti jednačinu

$$1+2\log_5(1-x)=\log_5(5-3x).$$

Uputstvo. $\log_5(5-3x)-\log_5(1-x)^2=1$.
3. Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}.$$

Uputstvo. Npr. smena $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$.
4. Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{2}=1.$$

Prijemni Ispit iz Matematike Septembar 2017, Ekologija

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{2}:\frac{7}{3}\right):4\frac{2}{7}=\frac{1}{4}.$$

2. Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{x}{y}\left(1-\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{x+y}\right)=1.$$

3. Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$3^{x^2-x-8}=\frac{1}{9}.$$

Uputstvo. $\frac{1}{9}=3^{-2}$.

1. Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{(2a^{1/2}-3a^{-1/2})(2a^{1/2}+3a^{-1/2})}{2a^{1/2}-3a^{-1/2}} + \frac{(2a^{1/2}-3a^{-1/2})(2a^{1/2}-3a^{-1/2})}{2a^{1/2}+3a^{-1/2}}\right)^2 \\ &= \left(2a^{1/2}+3a^{-1/2}+2a^{1/2}-3a^{-1/2}\right)^2 = \left(4a^{1/2}\right)^2 = 16a. \end{aligned}$$

2. Oblast definisanosti jednačine je odredjena uslovima $1-x>0$, $5-3x>0$, odnosno $(-\infty, 1)$.

$$\log_5 \frac{5-3x}{(1-x)^2} = 1, \quad \text{antilogaritmovanjem} \quad \frac{5-3x}{(1-x)^2} = 5.$$

Posle sredjivanja dobija se kvadratna jednačina $5x^2-7x=0$, čija su rešenja $x=0$ i $x=\frac{7}{5}$. Drugo rešenje ne pripada domenu, tako da je jedino rešenje polazne jednačine $x=0$.

3.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3} = \frac{2\log_2 2}{3\log_2 2}, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3x+3} = \frac{2}{3}, \qquad x=2.$$

4.

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 1.$$

$$\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha = 1, \qquad 1=1.$$

1. Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$I = \left(\frac{3}{7}+\frac{9}{14}\right) : \frac{30}{7} = \frac{15}{14}\cdot\frac{7}{3} = \frac{1}{4}.$$

2. Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$I = \frac{x}{y}\frac{y}{x+y} + \frac{y}{x}\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

3. $9^{x^2-x-8} = 3^{-2}$, tako da izjednačavanje eksponenata daje $x^2-x-6=0$, čija su rešenja $x_1=-2$ i $x_2=3$.