ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD

1. Odrediti realni i imaginarni deo sledećih kompleksnih brojeva:

   1) $z = 2 - 3i$ 2) $u = 3i$ 3) $\omega = 2 + \sqrt{3}$ 4) $z = (-3+i)(14-2i)$ 5) $z = 12 - 3i - (4+2i)$

   6) $u = (5+2i)(1-3i) - (2-3i)^2$ 7) $\omega = \frac{2+i}{3-2i}$ 8) $u = \frac{3}{i^3} + (1-6i) + i^4$ 9) $z = \frac{(1+2i)^2}{1-i} + i^{17}$

   10) $\omega = \frac{3-2i}{2+i} + \frac{2-i}{3+i}$ 11) $u = \frac{3-2i}{(-1+2i)^2}$ 12) $\omega = \overline{12+7i}$ 13) $z = \overline{2i(\frac{1}{2}-i)}$ 14) $z = \frac{i^{100}}{1-i} - (2+3i)(\overline{-1-2i})$

2. Odredi realne brojeve x i y iz sledećih jednačina:

   1) $(2x+3y) - (3x-y)i = 2+i$ 2) $5x - 3yi + 2i = 6 - xi - y$ 3) $(x+yi)(3-7i) = 2+4i$

3. Rešiti sledeće jednačine u skupu kompleksnih brojeva:

   1) $iz + (2-10i)z = 3z + 2i$ 2) $zRe(z-1) - 2Im(\frac{\overline{z}-1}{1+i}) = -i$ 3) $|z - 5i + 1| + i \cdot Im(\frac{2(z-\overline{z})}{3i}) = 9 - 8i$

4. Dokazati da za kompleksne brojeve važe sledeće osobine:

   1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 2) $\overline{-z} = -\overline{z}$ 3)$\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ 4) $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ 5) $\overline{1/z} = \frac{1}{\overline{z}}$

   6) $\overline{z_1/z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ 7)$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

5. Koristeći $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, pokazati da važi:

   1) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ 2) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

6. Odrediti kompleksan broj z iz uslova:

   1) $Re(\frac{z}{z_1}) = -\frac{3}{5} \wedge Im(\overline{z} \cdot z_1) = 1,\quad z_1 = 2+i$ 2) $|\frac{z-3}{2-\overline{z}}| = 1 \wedge Re(\frac{z}{2+i}) = 2$

   3) $Re(z \cdot \overline{z}_1) = 12 \wedge Im(\frac{z}{z_2}) = \frac{4}{5},\quad z_1 = 3+2i,\quad z_2 = 2+i$ 4) $|z-2i| = |z| \wedge |z-i| = |z-1|$

   5)$Re(z \cdot z_1) = 18 \wedge Im(\frac{\overline{z}}{z_1}) = \frac{1}{13},\quad z_1 = 2-3i$ 6) $|\frac{z-1}{z-3i}| = 1 \wedge Im(\frac{z}{2+i}) = -\frac{3}{5}$

   7) $|\frac{z-2}{z+3}| = 1 \wedge Re(\frac{z}{2+3i}) = \frac{1}{13}$

7. Odrediti brojeve z i u iz uslova $z + \overline{u} = 6 + 3i$ i $i\overline{z} + \frac{u}{i} = 11 - 4i$.

8. Odrediti brojeve z i ω iz uslova $(1+i)z + (2-i)\omega = -3i$ i $(1+2i)z + (3+i)\omega = 2+2i$.

9. Izračunati:

   1) $(1-i)^7$ 2) $(1+i)^{39}$ 3) $(1+i\sqrt{3})^{27}$ 4) $(2+i\sqrt{12})^6$

   5) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$ 6) $(10-5i)^{35}(1+3i)^{35}$ 7) $(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})^5$ 8) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$

   9) $(-3+i\sqrt{3})^{10}$ 10) $(1-i)^{-3}$

10. Naći sva rešenja jednačine i dati geometrijsku interpretaciju:

    1) $z^3 = -1 - i\sqrt{3}$ 2) $\frac{1}{z^4} = i$ 3) $z^4 = -1 + i$ 4) $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$

    5) $z^4 = 3 - i\sqrt{3}$ 6) $z^3 = i$ 7) $z^6 = -1$ 8) $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$

    9) $z^5 = (3-i)(3i-1)$ 10) $z^3 = (2-2i)^8$

11. Naći sva rešenja jednačine i dati geometrijsku interpretaciju:

$$z^3 = \frac{1-3i}{1+i} - \frac{2i}{1-i}.$$

12. Odrediti kompleksne brojeve z dobijene rotacijom u odnosu na koordinatni početak brojeva:
   (*) $-2\sqrt{3} - 2i$ za 60 stepeni
   (*) $4 + 4\sqrt{3}i$ za 90 stepeni

13. Neka je $z_1 = 3i$ jedno teme kvadrata $z_1z_2z_3z_4$. Odrediti ostala tri temena tako da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$.

14. Na kružnici $|z| = 3$ naći temena jednakostraničnog trougla $z_1z_2z_3$ ako za teme z_1 vai $arg(z_1) = arg(1+i)$.

15. Odrediti moduo i argument kompleksnog broja $z = (\frac{\sqrt{3}+i}{1+i})^{17}$

16. Odrediti algebarski oblik za u i u^{10}, ako je $u = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

17. Odrediti kompleksan broj z tako da $Re\left(\frac{z}{2+i}\right) = \frac{3}{5}$ i $Im\left(\overline{z} + (8-3i)\right) = 5$.

18. Kompleksni broj $z = (i-5)(2i-6) + \frac{8-6i}{-1-i} - i^{76} - 35$ prikazati u trigonometrijskom obliku. Odrediti njegov moduo i argument.

19. Odrediti kompleksan broj z tako da $|\overline{z} + i| + Im\{z + i - 5\} \cdot (2 - i) = \sqrt{5} + 2Im\{z\} + 2$.

20. Odrediti moduo i argument kompleksnog broja $u = -8 + 8i\sqrt{3}$, prikazati ga u eksponencijalnom obliku i u kompleksnoj ravni nacrtati $\sqrt[3]{u}$ i u.

21. Odrediti kompleksan broj z tako da $\frac{1}{z} = \frac{1}{u} + \frac{1}{w}$, gde je $u = 3 - i$ i $w = 4i^{22} + i^7$.

22. Izračunati realni i imaginarni deo kompleksnog broja $z = \frac{8-6i}{2+5i} + 2i^{17}$. Odrediti moduo, $|z|$.

23. Odrediti kompleksan broj z tako da $Re\left(z \cdot (2+i)\right) = 3$ i $Im\left(z + (8-3i)\right) = 5$.

24. Ako je $|z| = 2$ i $arg(z) = -\dfrac{\pi}{6}$ i $|u| = 5$ i $arg(u) = \dfrac{\pi}{2}$, izračunati $z \cdot u$ i prikazati ga u algebarskom obliku.

25. Ako je $|z| = 3$ i $arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$, i $|u| = 2$ i $arg(u) = \dfrac{3\pi}{2}$, izračunati $z \cdot u$ i prikazati ga u algebarskom obliku.

26. Ako je $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2)$ dokazati formulu:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

27. Rešiti jednačinu: $z(3+4i) - 2(1-i)i^{13} - 12i = 3$.

28. Odrediti kompleksan broj z tako da $2z^3 + 4 + 2i = 6$.